УДК 514.12:512.64

Р. А. МАРЧУК
Хмельницький національний університет

АНАЛІТИЧНО ЧИСЛОВИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ НЕОДНОРІДНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

На прикладі лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами проілюстровано аналітично числовий метод його розв'язування. При цьому на функції, що фігурують у диференціальному рівнянні, ніяких обмежень не накладається. Метод не складно поширити на лінійні диференціальні рівняння інших порядків.

On the example of linear heterogeneous differential equalization of the second order with variable coefficients is illustrated analytically numerical method of his solution. Functions which appear in differential equalization can be set any method and on them no limitations are imposed. It is not difficult to apply a method to solution of linear differential equalizations of other orders.

Дослідження багатьох фізичних, технічних, хімічних, радіотехнічних та ін. процесів зводиться до розв'язування лінійних диференціальних рівнянь. Аналітичні методи розв'язування таких рівнянь розроблені лише для деяких випадків, зокрема, коли функції, що є множниками при похідних, задані у виді поліномів, а функція, що розміщена у правій частині рівняння, не є розривною. За допомогою викладеної в даній роботі методики можна з високою точністю одержувати розв'язки лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку. При цьому на функції, що фігурують у диференціальному рівнянні, не накладається жодних обмежень і вони можуть бути задані будь-яким відомим способом (графічно, аналітично чи у виді таблиці).

Описаний метод розв'язування не складно розширити на лінійні диференціальні рівняння першого, третього та четвертого порядків.

Постановка завдання. Знайти частковий розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{d^2y}{dt^2}+g(t)\frac{dy}{dt}+\varphi(t)y=f(t) \tag{1}$$

за таких початкових умов:

$$y(t_0)=y_0;\quad y'(t_0)=y_0'. \tag{2}$$

Тут $g(t), \varphi(t), f(t)$ – задані будь-яким способом функції на інтервалі $[t_0, t_n]$, на якому необхідно знайти розв'язок.

Розв'язання. Інтервал $[t_0, t_n]$ точками

$$t_k=t_0+k\cdot h \tag{3}$$

поділимо на n однакових дрібних інтервалів шириною

$$h=\frac{t_n-t_0}{n}. \tag{4}$$

Довжина h інтервалу є настільки малою, що функції $g(t), \varphi(t)$ на кожному з цих інтервалів можна замінити постійними величинами, що дорівнюють їх значенням у центрі інтервалу, а функцію $f(t)$ – вважати лінійною. При таких допущеннях на кожному інтервалі слід розв'язувати диференціальне рівняння

$$\frac{d^2y}{dt^2}+a_k\frac{dy}{dt}+b_ky=c_kt+s_k, \tag{5}$$

у якому

$$a_k=g(t_k-0{,}5h);\ b_k=\varphi(t_k-0{,}5h);\ c_k=\frac{f(t_k)-f(t_{k-1})}{h};\ s_k=\left(1+\frac{t_{k-1}}{h}\right)f(t_{k-1})-\frac{t_{k-1}}{h}f(t_k). \tag{6}$$

Таким чином, задача зводиться до розв'язування на кожному інтервалі лінійного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами і правою частиною у виді полінома першого порядку. Початкові умови для кожного з таких рівнянь записуємо із розв'язку аналогічного рівняння на попередньому інтервалі у крайній правій точці. Почавши розв'язування рівняння (5) із першого інтервалу $[t_0, t_1]$ при початкових умовах (2), одержимо розв'язок $y(t)$ та похідну $y'(t)$ на цього інтервалі. Обчисливши $y(t)$ та $y'(t)$ при $t=t_1$, матимемо початкові значення для диференціального рівняння типу (5) на інтервалі $[t_1, t_2]$. Знайшовши його розв'язок на другому інтервалі, обчислимо значення $y(t_2)$ та $y'(t_2)$, які будуть служити початковими умовами для диференціального рівняння виду (5) на наступному інтервалі. Переходячи послідовно від інтервалу до інтервалу, одержимо розв'язок диференціального рівняння (1) при початкових умовах (2) на всьому інтервалі $[t_0, t_n]$.

Відомо [1], що загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (5) можна записати як суму загального розв'язку відповідного йому однорідного диференціального рівняння та деякого часткового розв'язку неоднорідного рівняння. Залежно від дискримінанта

$$D_k = 0,25a_k^2 - b_k \tag{7}$$

та значень коренів r_1 , r_2 характеристичного рівняння

$$r^2 + a_k r + b_k = 0 \tag{8}$$

одержимо п'ять варіантів розв'язку (цифри, що стоять після крапки в номерах наступних формул вказують номер варіанту, до якого ці формули належать).

Випишемо одержані розв'язки для всіх варіантів.

Варіант 1

$$D_k > 0,\ b_k \neq 0\ . \tag{9}$$

$$y(t) = M_k \exp(r_1 t) + N_k \exp(r_2 t) + R_k t + P_k\ ;\quad y'(t) = r_1 M_k \exp(r_1 t) + r_2 N_k \exp(r_2 t) + R_k\ ; \tag{10}$$

$$M_k = \frac{r_2\left(y(t_{k-1}) - R_k t_{k-1}\right) - y'(t_{k-1}) + R_k}{(r_2 - r_1)\exp(r_1 t_{k-1})};\quad N_k = \frac{r_1\left(y(t_{k-1}) - R_k t_{k-1} - P_k\right) - y'(t_{k-1}) + R_k}{(r_1 - r_2)\exp(r_2 t_{k-1})}; \tag{11}$$

$$r_1 = -0,5a_k + \sqrt{D_k}\ ;\quad r_2 = -0,5a_k - \sqrt{D_k}\ ;\ P_k = \frac{s_k}{b_k} - \frac{a_k c_k}{b_k^2}\ ;\quad R_k = \frac{c_k}{b_k}\ . \tag{12}$$

Варіант 2

$$D_k > 0,\ b_k = 0\ . \tag{13}$$

$$y(t) = M_k \exp(-a_k t) + N_k + R_k t^2 + P_k t\ ;\quad y'(t) = -a_k M_k \exp(-a_k t) + 2R_k t + P_k\ ; \tag{14}$$

$$\begin{gathered} M_k = \frac{P_k - y'(t_{k-1}) + 2R_k t_{k-1}}{a_k}\exp(a_k t_{k-1}); \\ N_k = y(t_{k-1}) - P_k t_{k-1} - R_k t_{k-1}^2 - \frac{1}{a_k}\left(P_k + 2R_k t_{k-1} - y'(t_{k-1})\right); \end{gathered} \tag{15}$$

$$r_1 = -a_k;\ r_2 = 0\ ;\quad P_k = \frac{s_k}{a_k} - \frac{c_k}{a_k^2}\ ;\quad R_k = \frac{c_k}{2a_k}\ . \tag{16}$$

Варіант 3

$$D_k = 0,\ a_k \neq 0\ . \tag{17}$$

$$y(t) = (M_k + N_k t)\exp(r_1 t) + R_k t + P_k\ ;\quad y'(t) = (r_1 M_k + r_1 N_k t + N_k)\exp(r_1 t) + R_k\ ; \tag{18}$$

$$\begin{gathered} M_k = \exp(0,5a_k t_{k-1})\Big(y(t_{k-1}) - P_k - y'(t_{k-1})t_{k-1} + 0,5a_k t_{k-1}\left(P_k + R_k t_{k-1} - y(t_{k-1})\right)\Big); \\ N_k = \exp(0,5a_k t_{k-1})\Big(y'(t_{k-1}) - R_k + 0,5a_k\left(y(t_{k-1}) - P_k - R_k t_{k-1}\right)\Big); \end{gathered} \tag{19}$$

$$r_1 = r_2 = -0,5a_k\ ;\quad P_k = \frac{s_k}{b_k} - \frac{a_k c_k}{b_k^2}\ ;\quad R_k = \frac{c_k}{b_k}\ . \tag{20}$$

Варіант 4

$$D_k = 0,\quad b_k = a_k = 0\ . \tag{21}$$

$$y(t) = M_k + N_k t + R_k t^3 + P_k t^2\ ;\quad y'(t) = N_k + 2P_k t + 3R_k t^2\ ; \tag{22}$$

$$\begin{gathered} M_k = y(t_{k-1}) - y'(t_{k-1})t_{k-1} + P_k t_{k-1}^2 + 2R_k t_{k-1}^3; \\ N_k = y'(t_{k-1}) - 2P_k t_{k-1} - 3R_k t_{k-1}^2; \end{gathered} \tag{23}$$

$$r_1 = r_2 = 0\ ;\quad P_k = 0,5s_k\ ;\quad R_k = \frac{c_k}{6}\ . \tag{24}$$

Варіант 5

$$D_k < 0\ . \tag{25}$$

$$\begin{gathered} y(t) = \exp(-0,5a_k t)\Big(M_k \cos(\beta_k t) + N_k \sin(\beta_k t)\Big) + R_k t + P_k\ ; \\ y'(t) = \exp(-0,5a_k t)\Big(\left(N_k\beta_k - 0,5a_k M_k\right)\cos(\beta_k t) - \left(M_k\beta_k + 0,5a_k N_k\right)\sin(\beta_k t)\Big) + R_k\ ; \end{gathered} \tag{26}$$

$$\begin{gathered} M_k = \exp(0,5a_k t_k)\beta_k^{-1}\Big(\left(y_k - P_k - R_k t_k\right)\beta_k \cos(\beta_k t_k) - \left(0,5a_k\left(R_k t_k + P_k - y_k\right) + P_k - y_k'\right)N_k \sin(\beta_k t_k)\Big)\ ; \\ N_k = \exp(0,5a_k t_k)\beta_k^{-1}\Big(\left(y_k' - P_k + 0,5a_k\left(y_k - P_k - R_k t_k\right)\right)\cos(\beta_k t_k) + \beta_k \sin(\beta_k t_k)\Big)\ ; \end{gathered} \tag{27}$$

$$\beta_k = \sqrt{-D_k}\ ;\quad P_k = \frac{s_k}{b_k} - \frac{a_k c_k}{b_k^2}\ ;\quad R_k = \frac{c_k}{b_k}\ . \tag{28}$$

Послідовність обчислень на ЕОМ

1) Вводимо t_0, t_n, h, y_0, y'_0, n, $k = 0$.

2) Обчислюємо k та t_k за формулами: $k = k + 1$, $t_k = t_0 + k \cdot h$.

3) Обчислюємо a_k, b_k, c_k, s_k за формулами (6) і D_k – за формулою (7).

4) Розгалуження програми на 5 гілок згідно з умовами (9), (13), (17), (21), (25). Для кожної з віток розраховуються величини $r_1, r_2, P_{k.}, R_k, N_k, M_k$ за формулами (11), (15), (19), (23), (27), (12), (16), (20), (24), (28), після яких – $y(t_k), y'(t_k)$ за формулами (10), (14), (18), (22), (26).

5) Друк t_k, $y(t_k)$, $y'(t_k)$.

6) Присвоюємо значення $y_0 = y(t_k)$; $y'_0 = y'(t_k)$.

7) Перевірка умови $k < n$. При її виконанні керування передається п. 2, а при невиконанні – п. 8.

8) Кінець виконання програми.

Вказівка програмісту. Для досягнення необхідної точності результатів слід правильно обрати довжину кроку h. Для цього налагоджену програму запускають декілька разів з кожним разом удвічі зменшуючи довжину кроку. Зупиняються на виборі такого кроку, при якому різниця між одержаними результатами та попередніми не перевищує заданої точності.

Список використаних джерел

1. Дубовик В. П. Вища математика / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : А.С.К., 2005. – 648 с.